Riassunti di Probabilità

Gemma Martini

20 aprile 2015

Capitolo 1

Teoria della misura

1.1 Elenco definizioni, teoremi e proposizioni raggruppati per ipotesi

1.1.1 Variabile aleatoria semplice

Definizione 1.1.1
Sia X una variabile aleatoria semplice, $X = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}$, possiamo definire l'**integrale**

$$\int_{\omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int X d\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{n} a_i d\mathbb{P}(A_i)$$

Proprietà 1.1.1.1 (no dim.)
Siano X e Y due variabili aleatorie reali semplici e sia $a \in \mathbb{R}$:

- $\int (aX + Y) d\mathbb{P} = a \int X d\mathbb{P} + \int Y d\mathbb{P}$
- se $X \leq Y$ allora $\int X d\mathbb{P} \leq \int Y d\mathbb{P}$

1.1.2 Variabile aleatoria semplice a valori positivi

Lemma 1.1.1
Sia X_n una sucessione di variabili aleatorie semplici a valori positivi, supponiamo che X_n converga crescendo verso X e supponiamo che anche X sia semplice. Allora

$$\int X_n d\mathbb{P} \uparrow \int X d\mathbb{P}$$

Lemma 1.1.2
Siano $(X_n)_{n \leq 1}$ e $(X'_n)_{n \leq 1}$ due successioni crescenti di variabili aleatorie semplici a valori positivi e supponiamo che si abbia $\lim\limits_{n} X_n \leq \lim\limits_{n} X_n$. Allora

$$\lim_{n} \int X_n d\mathbb{P} \leq \lim_{n} \int X'_n d\mathbb{P}$$

1.1.3 Variabile aleatoria a valori positivi

Teorema 1.1.3 (Approssimazione con variabili aleatorie semplici, no dim.)
Sia X una variabile aleatoria a valori positivi. Esiste una successione di variabili aleatorie semplici $(X_n)_{n\geq 1}$ (a valori positivi) tale che

$$X_n \uparrow X$$

Definizione 1.1.2
Sia X una variabile aleatoria a valori positivi, ne definiamo l'**integrale** come

$$\int X d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int X_n d\mathbb{P}$$

dove $(X_n)_{n\geq 1}$ è una successione di variabili aleatorie semplici tale che $X_n \uparrow X$.
Proprietà 1.1.3.1 (no dim.)
Siano X e Y due variabili aleatorie a valori positivi e sia $a \geq 0$:

- $\int (aX + Y) d\mathbb{P} = a \int X d\mathbb{P} + \int Y d\mathbb{P}$
- se $X \geq 0$ $\int X d\mathbb{P} = 0 \Leftrightarrow X = 0$ quasi certamente.
- se X e Y sono a valori reali quasi certamente vale l'uguaglianza

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P} \ \forall A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow X = Y \ q.c.$$

Lemma 1.1.4 (Proprietà di Beppo-Levi)
Siano $(X_n)_{n\geq 1}$ variabili aleatorie a valori positivi.

$$X_n \uparrow X \Rightarrow \int X_n d\mathbb{P} \uparrow \int X d\mathbb{P}$$

Lemma 1.1.5 (Proprietà di Fatou)
Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie a valori positivi. Vale la seguente disuguaglianza:

$$\int (\liminf_{x\to\infty} X_n) d\mathbb{P} \leq \liminf_{x\to\infty} \int X_n d\mathbb{P}$$

1.1.4 Variabile aleatoria

Definizione 1.1.3
Sia X una variabile aleatoria di segno qualsiasi e siano $X^+ = X \vee 0$ e $X^- = X \wedge 0$. X è detta **integrabile** se

$$\int |X| d\mathbb{P} = \int X^+ d\mathbb{P} + \int X^- d\mathbb{P} < \infty$$

e si chiama integrale il numero

$$\int X^+ d\mathbb{P} - \int X^- d\mathbb{P}.$$

Proprietà 1.1.4.1 (no dim.)
Siano X e Y due variabili aleatorie integrabili e sia $a \in \mathbb{R}$:

- $\int X + Y d\mathbb{P} = \int X d\mathbb{P} + \int Y d\mathbb{P}$
- $\int (aX) d\mathbb{P} = a \int X d\mathbb{P}$

Definizione 1.1.4
Siano X e Y variabili aleatorie e sia Y integrabile. Ha senso il numero

$$\int X d\mathbb{P} = \int (X - Y) d\mathbb{P} + \int Y d\mathbb{P}$$

e si dice che X è **semi-integrabile inferiormente**.
Proprietà 1.1.4.2 (no dim.)
Siano $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie e Y una variabile aleatoria integrabile tali che $X_n \geq Y$:

- Continua a valere Beppo-Levi
- Continua a valere Fatou

Teorema 1.1.6 (Convergenza dominata o di Lebesgue)
Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie reali e supponiamo che $(X_n)_{n\geq 1}$ converga puntualemente a ad X e che esista una variabile aleatoria integrabile Y tale che si abbia $|X_n| \leq Y$. Allora

$$\int X_n d\mathbb{P} \uparrow \int X d\mathbb{P}$$

Lemma 1.1.7 (no dim.)
Sia X una variabile aleatoria limitata. Allora esiste una successione $(X_n)_{n\geq 1}$ di variabili aleatorie semplici convergente uniformemente verso X.

1.2 Condizioni equivalenti per l'indipendenza

Definizione 1.2.1
Due **eventi** A e B sono detti **indipendenti** se vale la relazione $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$.
Definizione 1.2.2
Le $\boldsymbol{\sigma}$**-algebre** $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ sono dette **indipendenti** se, scelti comunque $A_1 \in \mathcal{F}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_n$ si ha

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \ldots \mathbb{P}(A_n)$$

Lemma 1.2.1
Due eventi A e B sono indipendenti se e solo se lo sono le σ-algebre $\sigma(A)$ e $\sigma(B)$.
Lemma 1.2.2 (no dim.)
Gli n eventi $A_1, \ldots, A_n$ sono indipendenti se e solo se, per ogni sottoinsieme di indici $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ vale l'uguaglianza

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Definizione 1.2.3
Le variabili aleatorie $X_1, \ldots, X_n$ a valori anche in spazi diversi $(E_i, \mathcal{E}_i)$ sono dette **indipendenti** se lo sono le σ-algebre da esse generate $X_1^{-1}(\mathcal{E}_1), \ldots, X_n^{-1}(\mathcal{E}_n)$.

Lemma 1.2.3
Siano $X_1, \ldots, X_n$ variabili aleatorie a valori anche in spazi diversi $(E_i, \mathcal{E}_i)$ indipendenti e tali che $\forall i, f_i : E_i \to F_i$ è una funzione misurabile, anche $f_1 \circ X_1, \ldots, f_n \circ X_n$ sono indipendenti.

Lemma 1.2.4
Siano X_1, X_2 variabili aleatorie a valori rispettivamente in $(E_1, \mathcal{E}_1)$ e $(E_2, \mathcal{E}_2)$ e sia $\forall i$ $\mathcal{I}_i$ una famiglia di parti stabile per l'intersezione che genera $\mathcal{E}_i$: affinchè X_1 e X_2 siano indipendenti è sufficiente che valga l'uguaglianza

$$\mathbb{P}(X_1^{-1}(B_1) \cap X_2^{-1}(B_2)) = \mathbb{P}(X_1^{-1}(B_1)).\mathbb{P}(X_2^{-1}(B_2))$$

per ogni scelta di $B_1 \in \mathcal{I}_1$ e $B_2 \in \mathcal{I}_2$.

Definizione 1.2.4
Sia $(X_i)_{i \in I}$ una famiglia infinita di variabili aleatorie: queste sono dette **indipendenti** se, per ogni sottinsieme finito di indici $i_1, \ldots, i_k$ le variabili $X_{i_1}, \ldots X_{i_k}$ sono indipendenti.

Lemma 1.2.5 (Criterio di indipendenza per una famiglia infinita)
Sia $(X_i)_{i \in I}$ una famiglia infinita di variabili aleatorie. Sono equivalnti le seguenti affermazioni:

1. *per ogni sottoinsieme finito di indici $i_1, \ldots, i_k$ le variabili $X_{i_1}, \ldots X_{i_k}$ le variabili $X_{i_1}, \ldots X_{i_k}$ sono indipendenti.*
2. *per ogni scelta di sottoinsiemi disgiunti $J_1 \ldots, J_k$ di I, le variabili $\mathbf{X}_{J_1}, \ldots, \mathbf{X}_{J_k}$ sono indipendenti.*

Lemma 1.2.6
Sia $(X_i)_{i \in I}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti, sono indipendenti le due variabili $Y = \limsup_n X_{2n}$ e $Z = \liminf_n X_{2n+1}$.

Lemma 1.2.7
Due variabili aleatorie X e Y sono indipendenti se e solo se $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$.

Lemma 1.2.8
Due variabili aleatorie X e Y sono indipendenti se e solo se scelte comunque f e g misurabili lmitate si ha

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)].$$

Lemma 1.2.9
Due variabili aleatorie reali X e Y sono indipendenti se e solo se vale l'uguaglianza

$$\varphi_{(X,Y)}(u, v) = \varphi_X(u).\varphi_Y(v) \ \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Capitolo 2

Convergenza

N.B. Quanto segue è enunciato per variabili aleatorie reali, ma vale anche per variabili aleatorie a valori in $\mathbb{R}^d$.

2.1 Convergenza di variabili aleatorie

2.1.1 Definizioni

Definizione 2.1.1
Si dice che la successione $(X_n)_{n\geq 1}$ converge a X

- **in probabilità** (e si scrive $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$) se $\forall \varepsilon > 0, \lim_n \mathbb{P}\{|X_n - X|\} = 0$;
- **quasi certamente** (e si scrive $X_n \xrightarrow{q.c.} X$) se per quasi ogni ω la successione di numeri $X_n(\omega)$ converge a $X(\omega)$;
- **in $\mathbf{L^p}$** se ogni X_n (ed X) appartiene a L^p e $\lim_n \|X_n - X\|_p = 0$;
- **in legge** (o anche **in distribuzione**) e si scrive $X_n \xrightarrow{\mathbf{L}} X$ se le relative leggi di probabilità $\mathbb{P}_{X_n} = X_n(\mathbb{P})$ convergono strettamente alla legge $\mathbb{P}_X = X(\mathbb{P})$.

Definizione 2.1.2
Diciamo che una successione $(X_n)_{n\geq 1}$ **è di Cauchy in probabilità** se, $\forall \varepsilon, \delta > 0\ \exists \bar{n}$ tale che, presi $n, m > \bar{n}$, si abbia $\mathbb{P}\{|X_n - X_m| > \varepsilon\} \leq \delta$.
Definizione 2.1.3
Indichiamo con $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ lo spazio di **tutte le variabili aleatorie reali, munito della convergenza in probabilità**.

2.1.2 La convergenza in L^p implica...

Lemma 2.1.1
Se X_n converge a X in L^p, allora:

- $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

2.1.3 La convergenza quasi certa implica...

Lemma 2.1.2
Se $X_n \stackrel{q.c.}{\to} X$, allora:

- $X_n \stackrel{\mathbb{P}}{\to} X$;
- *non proviene da una topologia.*

2.1.4 La convergenza in probabilità implica...

Lemma 2.1.3
Se $X_n \stackrel{\mathbb{P}}{\to} X$, allora:

- $\exists$ *sottosuccessione* X_{n_k} *tale che* $X_{n_k} \stackrel{q.c.}{\to} X$;
- *il limite è unico;*
- *sia f continua,* $f(X_n) \stackrel{\mathbb{P}}{\to} f(X)$;
- *sia* $Y_n \stackrel{\mathbb{P}}{\to} Y$, *allora* $(X_n + Y_n) \stackrel{\mathbb{P}}{\to} (X + Y)$ *e* $X_n Y_n \stackrel{\mathbb{P}}{\to} XY$;
- $X_n \stackrel{\mathbf{L}}{\to} X$.

2.1.5 La convergenza in legge implica...

Lemma 2.1.4
Se $X_n \stackrel{\mathbf{L}}{\to} X$, allora:

- *sia g continua, allora* $g(X_n) \stackrel{\mathbf{L}}{\to} g(X)$;
- *sia f continua, a valori positivi, si ha* $\mathbb{E}[f(X)] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)]$;
- *se la variabile limite $X = c$, allora* $X_n \stackrel{\mathbb{P}}{\to} c$;
- $\varphi_n(t)$ *converge puntualmente a* $\varphi_X(t)$ *[cfr. teorema di Paul Lèvy];*
- *se X_n è gaussiana, anche X lo è;*
- *[teorema di Slutsky] se* $Y_n \stackrel{\mathbb{P}}{\to} c$, *allora* $(X_n, Y_n) \stackrel{\mathbf{L}}{\to} (X, c)$;
- *[teorema di rappresentazione di Skorohod] Si può costruire su uno spazio di probabilità* $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ *una successione di variabili aleatorie* $(Y_n)_{n\geq 1}$ *ed una variabile aleatoria Y tali che* $X_n(\mathbb{P}) = Y_n(\mathbb{P}')$, $X(\mathbb{P}) = Y(\mathbb{P}')$ *e* $Y_n \stackrel{q.c.}{\to} Y$.

2.1.6 Condizioni equivalenti per la convergenza in probabilità

Lemma 2.1.5
$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ *se e solo se:*

- *da ogni sottosuccessione si può estrarre una ulteriore sottosucccessione convergente ad* X *quasi certamente;*
- $(X_n, X) \xrightarrow{\mathbf{L}} (X, X)$.

2.1.7 Condizioni equivalenti per la convergenza in legge

Lemma 2.1.6
$X_n \xrightarrow{\mathbf{L}} X$ *se e solo se:*

- F_n *converge ad* F *in tutti i punti in cui* F *è continua;*
- F_n *converge ad* F *in tutti i punti di un insieme denso.*

2.2 Convergenza di misure

2.2.1 Definizioni

Definizione 2.2.1
Sia $(\mu_n)_{n\geq 1}$ una successione di misure limitate su $\mathbb{R}$ e μ una misura limitata su $\mathbb{R}$. Si dice che:

- $\mu_n \to \mu$ **vagamente** se, per ogni funzione f continua a supporto compatto, $\mu_n(f) \to \mu(f)$;
- $\mu_n \to \mu$ **debolmente** se, per ogni funzione f continua e infinitesima all'infinito, $\mu_n(f) \to \mu(f)$;
- $\mu_n \to \mu$ **strettamente** se, per ogni funzione f continua e limitata, $\mu_n(f) \to \mu(f)$.

Definizione 2.2.2
Una famiglia $\mathcal{M}$ di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ è detta **tesa** se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K$ compatto tale che $\forall \mu \in (M)$ valga la disuguaglianza $\mu(K) \geq 1 - \varepsilon$.

2.2.2 La convergenza stretta implica...

Lemma 2.2.1
Se $\mu_n \to \mu$*, allora:*

- *se* $\sup_n \mu_n(\mathbb{R}) < +\infty$*, allora* $\mu_n \to \mu$ *debolmente;*
- *siano* F_n *e* F *funzioni di ripartizioni relative a* μ_n *e* μ *(misura limitata), allora* $F_n(x) \to F(x)$ *in tutti i punti* x *nei quali* F *è continua;*
- *sia* f *una funzione boreliana limitata tale che l'insieme dei suoi punti di discontinuità sia trascurabile per la misura limite* μ*: allora* $\mu_n(f) \to \mu(f)$.

2.2.3 Condizioni equivalenti per la convergenza stretta

Lemma 2.2.2
$\mu_n \to \mu$ se e solo se:

- *$\mu_n \to \mu$ vagamente e $\mu_n(\mathbb{R}) \to \mu(\mathbb{R})$.*

2.3 Altri teoremi sulla convergenza

Teorema 2.3.1
Ogni successione di variabili aleatorie di Cauchy in probabilità converge in probabilità.

Corollario 2.3.2
Lo spazio $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ è completo.

Lemma 2.3.3
Sia $(\mu_n)_{n\geq 1}$ una successione di misure di probabilità su $\mathbb{R}$, μ una misura limitata e siano F_n ed F le relative funzioni di ripartizione. Se $F_n(x) \to F(x)$ in tutti i punti di un insieme denso in $\mathbb{R}$, $\mu_n \to \mu$ vagamente.

Teorema 2.3.4 (Teorema di Helly)
Sia $(\mu_n)_{n\geq 1}$ una successione di misure di probabilità su $\mathbb{R}$: esiste una sottosuccessione convergente debolmente ad una misura μ tale che $\mu(\mathbb{R}) \leq 1$.

Teorema 2.3.5 (Teorema di Prohorov)
Sia $\mathcal{M}$ una famiglia di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Sono equivalenti le seguenti proprietà:

- *la famiglia $\mathcal{M}$ è relativaamente compatta per successioni rispetto alla convergena stretta;*
- *la famiglia $\mathcal{M}$ è tesa.*

Teorema 2.3.6 (Teorema di Paul Lèvy)
Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie, siano $\varphi_n(.)$ le relative funzioni caratteristiche e sia X una variabile aletoria

- *se $X_n \xrightarrow{\mathbf{L}} X$, allora $\varphi_n(t)$ converge puntualmente a $\varphi_X(t)$;*
- *supponiamo che la successione delle funioni caratteristiche converga puntualmente ad una funione φ continua nel punto 0: allora φ è la funzione caratteristica di una variaile aleatoria X e $X_n \xrightarrow{\mathbf{L}} X$.*